الدرس 12

الجداء السلمي في الفضاء

1 . الجداء السلمي في المستوي (تذكير)

تعريف

$\vec{U}$ و $\vec{V}$ شعاعان من المستوي.

- إذا كان أحد الشعاعين معدوم فإن الجداء السلمي معدوم أي $\vec{U}\,.\,\vec{0}=\vec{0}\,.\,\vec{V}=0$
- إذا كان الشعاعان غير معدومين فإن الجداء السلمي لـ $\vec{U}$ و $\vec{V}$ هو العدد الحقيقي $\vec{U}\,.\,\vec{V}$

حيث $\vec{U}\,.\,\vec{V}=\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=AB\times AC\cos(B\hat{A}C)$

$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ممثلان على التوالي لـ $\vec{U}$ و $\vec{V}$

خواص

1) - إذا كانت H المسقط العمودي للنقطة C على (AB) و K المسقط العمودي لـ B على (AC)

فإن $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AK}\,.\,\overrightarrow{AC}$

- إذا كان $\overrightarrow{C'D'}$ المسقط العمودي لـ $\overrightarrow{CD}$ على (AB)

فإن $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{C'D'}$



2) إذا كان $\vec{U}$ و $\vec{V}$ شعاعين مرتبطين خطيا وفي نفس الاتجاه فإن $\vec{U}\,.\,\vec{V}=\|\vec{U}\|\times\|\vec{V}\|$

أي $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=AB\times AC$

- إذا كان $\vec{U}$ و $\vec{V}$ مرتبطين خطيا ومختلفين في الاتجاه فإن :

$$\vec{U}\,.\,\vec{V}=-\|\vec{U}\|\times\|\vec{V}\|=-AB\times AC$$

3) $\vec{U}\,.\,\vec{U}=\vec{U}^2=\overrightarrow{AB}^2=AB^2$ يسمى $\vec{U}^2$ المربع السلمي لـ $\vec{U}$.

4) $\vec{U}$ ، $\vec{V}$ ، $\vec{W}$ ثلاث أشعة من المستوي و k عدد حقيقي لدينا :

$$\vec{U}\,.\,\vec{V}=\vec{V}\,.\,\vec{U}$$

$$\vec{U}\,.\,(k\vec{V})=(k\vec{U})\,.\,\vec{V}=k\,(\vec{U}\,.\,\vec{V})$$

$$\vec{U}\,.(\vec{V}+\vec{W})=\vec{U}\,.\,\vec{V}+\vec{U}\,.\,\vec{W}$$

$$(\vec{U}+\vec{V})^2=\vec{U}^2+2(\vec{U}\,.\,\vec{V})+\vec{V}^2$$

$$(\vec{U}+\vec{V})\,(\vec{U}-\vec{V})=\vec{U}^2-\vec{V}^2$$

$$\left(\vec{U}-\vec{V}\right)^2=\vec{U}^2-2\left(\vec{U}\,.\,\vec{V}\right)+\vec{V}^2$$

5) $\vec{U}\,.\,\vec{V}=\frac{1}{2}\left[\|\vec{U}+\vec{V}\|^2-\|\vec{U}\|^2-\|\vec{V}\|^2\right]$

6) $\vec{U}$ و $\vec{V}$ متعامدان إذا وفقط إذا كان $\vec{U}\,.\,\vec{V}=0$

7) - في معلم متعامد ومتجانس إذا كان $\vec{U}$ و $\vec{V}$ إحداثياتهما على التوالي (x,y) و (x',y')

فإن $\vec{U}\,.\,\vec{V}=xx'+yy'$ و $\|\vec{U}\|=\sqrt{x^2+y^2}$

- إذا كانت A و B نقطتين من المستوي إحداثياتهما على التوالي (x_A,y_A) ، (x_B,y_B)

فإن $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

نتائج

- في المتوازي الأضلاع $ABCD$ لدينا :

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left[AD^2-AB^2-AC^2\right]$$

- في المثلث ABC لدينا $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left[AB^2+AC^2-BC^2\right]$
- إذا كانت A و B نقطتان من المستوي و I منتصف $[AB]$ فإن :

من أجل كل نقطة M من المستوي يكون $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$ (نظرية المتوسط).

- إذا كان ABC مثلثا كيفيا و a ، b ، c أطوال أضلاعه $[BC]$ ، $[AC]$ ، $[AB]$ فإن :
$a^2=b^2+c^2-2bc\cos(\hat{A})$ (نظرية الكاشي)
- في المتوازي الأضلاع $ABCD$ لدينا :
$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2$ نظرية (فان نيومان).

تمرين تدريبي ❶

$ABCD$ مستطيل بحيث $AB=5$ ، $AD=3$
لتكن B' ، D' مسقطي B و D على المستقيم (AC)
1- أ) احسب $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$
ب) استنتج قيمة $\cos(D\hat{A}C)$ ، ثم القيمة المقربة لـ $D\hat{A}C$
2- أ) احسب $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DB}$
ب) استنتج الطول $D'B'$

✓ الحل :

1) أ) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=AD^2=9$ لأن D هي مسقط C على (AD)

ب) لدينا $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=AD\times AC\cos(D\hat{A}C)$ ومنه $\cos(D\hat{A}C)=\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}}{AD\times AC}$

$\cos(D\hat{A}C)=\frac{9}{3\times\sqrt{34}}=0{,}51$

القيمة المقربة لـ $D\hat{A}C$ هي $59{,}04$ درجة.

2) أ) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{D'B'}=-CA\times D'B'$ ...... (I)

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{CA}\cdot(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}+(-\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=AD^2-AB^2=9-25=-16$

ب) من المساواة (I) نجد $D'B'=\frac{-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DB}}{CA}=\frac{16}{\sqrt{34}}$

تمرين تدريبي ❷

ABC مثلث قائم في A ، M منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$ و H المسقط العمودي لـ A على (BC) ، K و L مسقطي H على التوالي على $[AB]$ و $[AC]$
بين أن المستقيمين (AM) و (KL) متعامدان.

✓ الحل :

لإثبات أن (AM) و (KL) متعامدان نثبت أن $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{KL}=0$

بما أن M منتصف $[BC]$ فإن $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

نحسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{KL}$ و $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{KL}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HA}$ (استعملنا الإسقاط العمودي على (AB))

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}$

- $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{KL}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{KL})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{KL})$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HA})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH})$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}\cdot(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

لأن H مسقط A على (BC).

❷ - معادلة مستقيم ودائرة في المستوي

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

- إذا كان $\vec{n}(a,b)$ الشعاع الناظم لمستقيم (d) فإن معادلة (d) تكتب على الشكل $ax+by+c=0$
وبالعكس إذا كان a و b عددين حقيقيين غير معدومين معا، فإن المعادلة $ax+by+c=0$ هي معادلة لمستقيم شعاعه الناظم إحداثياته (a,b)
- الدائرة ذات المركز $I(a,b)$ وطول نصف القطر r هي مجموعة النقط $M(x,y)$ بحيث $IM=r$. ومعادلة هذه الدائرة هي $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
- الدائرة التي قطرها $[AB]$ هي مجموعة النقط M بحيث $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

تمرين تدريبي

في معلم متعامد ومتجانس نعتبر النقط $A(2,3)$ ، $B(3,5)$ ، $C(0,4)$
1- بين أن المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين.
2- عين معادلة الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .
3- عين معادلة متوسط القطعة $[BC]$.

✓ الحل :

1) لدينا $\overrightarrow{AB}(1,2)$ ، $\overrightarrow{AC}(-2,1)$ ، $\overrightarrow{BC}(-3,-1)$

نلاحظ أن $AB=AC=\sqrt{5}$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ ومنه المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين.

2) بما أن الدائرة محيطة بالمثلث القائم والمتساوي الساقين ABC ، فإن قطرها هو $[BC]$
ومركزها هو I منتصف $[BC]$.
إحداثيتا I هما $(1{,}5 ، 4{,}5)$ و $BC=\sqrt{10}$
إذن معادلة الدائرة هي $(x-1{,}5)^2+(y-4{,}5)^2=10$

4) الشعاع $\overrightarrow{BC}$ هو الشعاع الناظم لمتوسط القطعة $[BC]$.
لتكن $M(x,y)$ نقطة من متوسط القطعة $[BC]$.

لدينا إذن $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{IM}=0$ ومنه ينتج $3x+y-9=0$.

3 . المسافة بين نقطة ومستقيم في المستوي

تعريف

ليكن (d) مستقيم من المستوي و M نقطة كيفية من المستوي .
نسمي مسافة بين النقطة M والمستقيم (d) . العدد الحقيقي الموجب HM
حيث H المسقط العمودي للنقطة M على (d) .

خاصية

ليكن (d) مستقيما معادلته $ax+by+c=0$ في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس
و M_0 نقطة من المستوي إحداثياتها (x_0,y_0) .
المسافة بين M_0 و (d) تساوي $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

تمرين تدريبي

نعتبر في معلم متعامد ومتجانس المستقيم (d) ذا المعادلة $x+2y+3=0$
ولتكن A نقطة إحداثياتها $(1,2)$
1) عين المسافة بين A و (d)
2-أ) تحقق أن النقطتين $B(-1,-1)$ ، $C(5,1)$ تنتميان إلى (d) ،
ثم عين مساحة المثلث ABC
ب) عين المسافة بين B و (AC) ثم اعط قيمة مقربة لها.

✓ الحل :

1) المسافة بين A و (d) هي $\dfrac{|1+2\times2+3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{8}{\sqrt{5}}$

2) أ) بما أن $-1+2(-1)+3=0$ فإن النقطة B تنتمي إلى (d) .
وبنفس الطريقة نبين أن النقطة C تنتمي إلى (d) .
مساحة المثلث ABC هي $\dfrac{BC\times AH}{2}$ حيث $[AH]$ هو الارتفاع المرسوم من A في المثلث ABC

ومن السؤال (1) لدينا $AH=\dfrac{8}{\sqrt{5}}$ إذن $\dfrac{BC\times AH}{2}=\dfrac{5\times\frac{8}{\sqrt{5}}}{2}=4\sqrt{5}$

ب) مساحة المثلث ABC هي $\dfrac{1}{2}h\,AC$ حيث h طول العمود المرسوم من B في المثلث ABC

إذن $\dfrac{1}{2}h\,AC=4\sqrt{5}$ ومنه $h=\dfrac{8\sqrt{5}}{AC}=\dfrac{8\sqrt{5}}{\sqrt{37}}$

4 . الجداء السلمي في الفضاء

مثال -

$ABCDEFGH$ متوازي المستطيلات قائم حيث $AB=2a$ و $BC=BF=a$
مع a عدد حقيقي موجب تماما.

1) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AH}$ في المستوي (AED) .

2-أ) الأشعة $\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{AE}$ ، $\overrightarrow{CF}$ من نفس المستوي لماذا ؟

ب) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{DE}$ في المستوي (AED) مستنتجا $\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{AH}$.

3) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}$ في المستوي (ABC) مستنتجا $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{HG}$.

4-أ) المستقيمان (AD) و (GD) متعامدان لماذا ؟

ب) احسب $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AG}$ في المستوي (ADG)
وتحقق باستعمال السؤالين (1) و (3) أن
$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{HG}$

✓ الحل :

1) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}=AD^2=a^2$
لأن D هي المسقط العمودي للنقطة H على (AD)

2) أ) بما أن $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DE}$ و $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}$ فإن الأشعة $\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{CF}$ تنتمي إلى نفس المستوي (AED)

ب) $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$ لأن الرباعي $AEHD$ مربع

$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$

3) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$ لأن الرباعي $ABDC$ مستطيل

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$

4) أ) بما أن (AD) عمودي على المستوي (GDC) فإنه عمودي على كل مستقيم منه، إذن فهو عمودي على (DG)

ب) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG})$

$= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DG} = AD^2 + 0 = a^2$

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HG} = a^2 + 0 = a^2$

إذن $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AG}$

4 . 1 تعريف

ليكن $\vec{U}$ و $\vec{V}$ شعاعين من الفضاء.

- إذا كان $\vec{U}$ و $\vec{V}$ غير معدومين و $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ ممثليهما على التوالي، فإنه يوجد على الأقل مستوي يشمل النقط A ، B ، (E).

نسمي الجداء السلمي للشعاعين $\vec{U}$ و $\vec{V}$ بالجداء السلمي $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ المحسوب في المستوي (ABC)

أي $\vec{U} \cdot \vec{V} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC . \cos(\widehat{BAC})$

- إذا كان أحد الشعاعين معدوما فإن جداءهما السلمي معدوم أي $\vec{U} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{V} = 0$

خواص

كل خواص الجداء السلمي في المستوي تبقى صحيحة في الفضاء وبالأخص:

1) $\vec{U} \cdot \vec{V} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$

$= \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AC}$

حيث H المسقط العمودي للنقطة C على (AB)

و K المسقط العمودي للنقطة B على (AC)

2) $\vec{U} \cdot (k\vec{V}) = k(\vec{U} \cdot \vec{V})$

3) $\vec{U} \cdot (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U} \cdot \vec{V} + \vec{U} \cdot \vec{W}$

4 - 2 العبارة التحليلية للجداء السلمي - المسافة بين نقطتين

$(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء حيث $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$

- إذا كان $\vec{V}$ و $\vec{U}$ شعاعان إحداثياتهما على التوالي (x, y, z) ، (x', y', z') في المعلم $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

فإن $\vec{U} \cdot \vec{V} = xx' + yy' + zz'$

وبصفة خاصة $\vec{U} \cdot \vec{U} = x^2 + y^2 + z^2$ و $\|\vec{U}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

- إذا كانت A و B نقطتين من الفضاء إحداثياتهما على التوالي (x_A, y_A, z_A) ، (x_B, y_B, z_B)

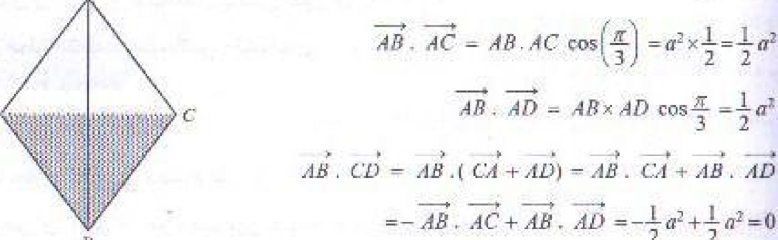
فإن $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

تمرين تدريبي ❶

$ABCD$ رباعي وجوه منتظم بحيث كل وجه هو مثلث متقايس الأضلاع طول ضلعه $C\,(3\ 5)$

- احسب $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

✓ الحل:



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB . AC \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = a^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} a^2$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} a^2$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

$= -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} a^2 = 0$

تمرين تدريبي ❷

$ABCDEFGH$ مكعب و $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

أ) عين إحداثيات الأشعة $\overrightarrow{AG}$ ، $\overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{ED}$

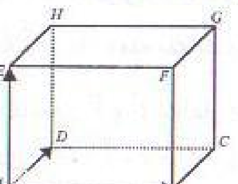
ب) بين أن المستقيم (AG) يعامد المستوي (BED)

✓ الحل:

أ) $A(0,0,0)$ ، $B(1,0,0)$ ، $C(1,1,0)$ ، $D(0,1,0)$ ، $E(0,0,1)$ ، $F(1,0,1)$ ، $G(1,1,1)$ ،

$H(0,1,1)$ ، $\overrightarrow{AG}(1,1,1)$ ، $\overrightarrow{BE}(-1,0,1)$ ، $\overrightarrow{ED}(0,1,-1)$.

ب) كل مستقيم يعامد مستقيمين متقاطعين فإنه يعامد المستوي الذي يشملهما.



$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE} = -1+0+1=0$ ومنه (AG) عمودي على (BE).

$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{ED} = 0+1-1=0$ ومنه (AG) عمودي على (ED).

بما أن (AG) عمودي على (ED) وعلى (BE).

و (ED) و (BE) متقاطعين فإنه عمودي على المستوي الذي يشمل (ED) و (BE) أي عمودي على (BED).

5- التعامد في الفضاء

1.5 أشعة متعامدة

في الفضاء، القول أن الشعاعين الغير المعدومين $\vec{U}$ و $\vec{V}$ متعامدان يعني أنه إذا كان $\vec{U}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{V}=\overrightarrow{CD}$ فإن المستقيمين (AB) و (CD) متعامدان.

مبرهنة

1- القول أن $\vec{U}$ و $\vec{V}$ متعامدان يكافئ القول أن $\vec{U}\cdot\vec{V}=0$

2- في معلم متعامد ومتجانس، الشعاعان $\vec{U}(x,y,z)$ و $\vec{V}(x',y',z')$ متعامدان يكافئ $xx'+yy'+zz'=0$

الإثبات

1- إذا كان $\vec{U}$ أو $\vec{V}$ معدوم فإن $\vec{U}\cdot\vec{V}=0$

- نفرض أن $\vec{U}$ و $\vec{V}$ غير معدومين عندئذ توجد نقط مختلفة A ، B ، C بحيث:

$\vec{U}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{V}=\overrightarrow{AC}$

ولتكن D نقطة بحيث $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$

حسب تعريف الجداء السلمي لدينا:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left[\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right]$$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ يكافئ $\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2$

يكافئ $AD^2=AB^2+AC^2$

إذن وحسب نظرية فيتاغورس ينتج أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متعامدان

وعليه $\vec{U}$ و $\vec{V}$ متعامدان.

2- لدينا $\vec{U}\cdot\vec{V}=xx'+yy'+zz'$ ومن (1) نستنتج أن:

$\vec{U}\cdot\vec{V}=0$ يكافئ $xx'+yy'+zz'=0$.

5-2 الشعاع الناظم لمستوي - تعامد مستقيم ومستوي

الشعاع الناظم لمستوي

- القول ن الشعاع الغير معدوم $\overrightarrow{AB}$ ناظم للمستوي (P) يعني أن المستقيم (AB) يعامد المستوي (P)

- الشعاع الناظم لمستوي (P) هو شعاع غير معدوم $\vec{n}$ بحيث منحاه يعامد المستوي (P)

تعامد مستقيم و مستوي

- (d) مستقيم شعاع توجيهه $\vec{n}$ و A نقطة منه.

المستوي (P) العمودي على (d) في A هو مجموعة النقط M حيث أن المستقيم (AM) عمودي على المستقيم (d).

إذن (P) هو مجموعة النقط M حيث أن (AM) يعامد $\vec{n}$.

وعليه يكون $\vec{n}$ هو الشعاع الناظم لـ (P) .

- مجموعة نقط المستوي

- المستوي الذي يمر من النقطة A و شعاعه الناظمي $\vec{n}$

هو مجموعة النقط M من الفضاء بحيث $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$

ملاحظة

$\vec{n_1}$ ، $\vec{n_2}$ شعاعان ناظمان لـ (P_1) و (P_2) على الترتيب

- إذا كان $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ مرتبطين خطيا فإن (P_1) و (P_2) متوازيان أو منطبقان.
- إذا كان $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ متعامدين فإن (P_1) و (P_2) متعامدان والعكس صحيح.
- إذا كان $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ مستقلين خطيا فإن (P_1) و (P_2) متقاطعان.

تمرين تدريبي

(d) مستقيم محتوى في (P) و A نقطة خارجة عن (P) و B مسقطها عليه.
و C هي المسقط العمودي للنقطة B على (d).
بين أن المستقيمين (AC) و (d) متعامدان.

✓ **الحل :**

للبرهان على أن مستقيمين متعامدان يكفي أن نبرهن أن الجداء السلمي لشعاعي توجيههما معدوم.

$\overrightarrow{AC}.\vec{U} = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}).\vec{U}$

$= \overrightarrow{AB}.\vec{U}+\overrightarrow{BC}.\vec{U} = 0+0=0$

لأن (AB) عمودي على (P) و $\overrightarrow{BC}$ عمودي على $\vec{U}$.

❻ . المعادلة الديكارتية لمستوي

6 - 1 المعادلة الديكارتية لمستو

مبرهنة

- كل مستوي (P) شعاعه الناظم $\vec{n}(a,b,c)$ له معادلة ديكارتية من الشكل :

$ax+by+cz+d=0$

حيث a,b,c اعداد حقيقية غير معدومة معا.

- بالعكس مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء حيث $ax+by+cz+d=0$ مع $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ هي مستوي شعاعه الناظم $\vec{n}(a,b,c)$

الإثبات

لتكن $A(x_0,y_0,z_0)$ نقطة من المستوي (P) .

- النقطة $M(x,y,z)$ تنتمي إلى (P) يكافئ $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$

وعليه ينتج $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ بعد النشر والتبسيط

نجد $ax+by+cz+d=0$ حيث $d=-ax_0-by_0-cz_0$

- بما أن a,b,c ليست كلها معدومة معا فيمكننا أن نفرض $a\neq0$.

نسمي (E) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ بحيث $ax+by+cz+d=0$

النقطة $A\left(-\frac{d}{a},0,0\right)$ تنتمي إلى (E) .

وبالتالي فإن معادلة (E) تكتب على الشكل $a\left(x+\frac{d}{a}\right)+by+cz=0$

أي $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ حيث $\vec{n}(a,b,c)$

إذن (E) هو المستوي المار من النقطة A وشعاعه الناظم هو $\vec{n}(a,b,c)$.

مثال - ♦

في معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نعتبر النقط $A(1,1,-1)$ ، $B(3,1,-2)$ ، $C(2,0,-2)$

أ) بين أن النقط A ، B ، C تحدد مستوي.

ب) عين شعاعا ناظما للمستوي (ABC)

جـ) عين معادلة للمستوي (ABC) .

✓ **الحل :**

أ) حتى تحدد النقط A ، B ، C مستويا يجب أن يكون الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا.

لدينا $\overrightarrow{AB}(2,0,-1)$ ، $\overrightarrow{AC}(1,-1,-1)$

الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطيا وبالتالي

فإن النقط A ، B ، C تحدد مستوي.

ب) ليكن $\vec{n}(a,b,c)$ شعاع ناظم للمستوي (ABC) فهو إذن عمودي على $\overrightarrow{AB}$ وعلى $\overrightarrow{AC}$

إذن $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$ يكافئ $2a-c=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$ يكافئ $a-b-c=0$

ومنه نستنتج $c=2a$ و $b=-a$

إذن $\vec{n}(a,-a,2a)$ أي $\vec{n}=a(1,-1,2)$

إذن يوجد عدد غير منته من الأشعة الناظمية، نختار على سبيل المثال الشعاع الموافق للعدد $a=1$ فنجد $\vec{n}(1,-1,2)$

جـ) تعيين معادلة المستوي (ABC) :

طريقة-1 :

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة كيفية من (ABC) عندئذ:

$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ ومنه ينتج $(x-1)-1(y-1)+2(z+1)=0$

بالتبسيط نجد $x-y+2z+2=0$.

طريقة-2 :

بما أن $\vec{n}(1,-1,2)$ ناظم للمستوي (ABC)

فإن معادلة (ABC) هي $x-y+2z+d=0$

وبما أن $A\in(ABC)$ فإن $1-1-2+d=0$ أي $d=2$

ومنه تكون معادلة المستوي (ABC) هي $x-y+2z+2=0$.

6 . 2 المسافة بين نقطة و مستوي

تعريف

1) M نقطة من الفضاء و (P) مستوي.
يوجد مستقيم واحد عمودي على (P) يمر بالنقطة M . هذا المستقيم يقطع (P) في نقطة وحيدة H والتي تسمى بالمسقط العمودي للنقطة M على (P)
نسمي المسافة بين M و (P) بالطول MH

2) لتكن M نقطة من الفضاء و (d) مستقيم.
يوجد مستوي وحيد يمر بالنقطة M ويعامد (d) ويقطعه في نقطة وحيدة.
هذه النقطة تسمى بالمسقط العمودي للنقطة M على (P).

مبرهنة

في معلم متعامد ومتجانس المسافة بين النقطة $A(\alpha,\beta,\gamma)$ والمستوي (P) ذو المعادلة : $ax+by+cz+d=0$ هي العدد الحقيقي الموجب $\dfrac{|a\alpha+b\beta+c\gamma+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

مثال - ♦

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.
$A(1,2,3)$ نقطة منه و (P) مستوي معادلته الديكارتية $2x+3y+z-2=0$
- بين أن A لا تنتمي إلى (P) ، ثم احسب المسافة بين A و (P).

✓ الحل :

بما أن $2\times1+3\times2+3-2=9$ فإن المعادلة غير محققة وبالتالي A لا تنتمي إلى (P).

المسافة بين A و (P) هي $\dfrac{|2\times1+3\times2+3-2|}{\sqrt{4+9+1}}=\dfrac{9}{\sqrt{14}}$

6 . 3 نصف الفضاء

ليكن (P) مستوي معادلته $ax+by+cz+d=0$ مع a,b,c أعداد حقيقية ليست كلها معدومة. ولتكن $A(x_0,y_0,z_0)$ نقطة من هذا المستوي.

المستوي (P) يُقسم الفضاء إلى نصفي فضاء حيث أن في أحدهما يكون فيه $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}>0$
وفي الآخر يكون $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}<0$.

لكن $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)$

وبما أن $A\in(P)$ فإن $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=ax+by+cz+d$

تعريف

مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق $ax+by+cz+d>0$ حيث a و b و c ليست كلها معدومة هي نصف فضاء مفتوح حده المستوي (P) ذو المعادلة $ax+by+cz+d=0$.
ونصف الفضاء الآخر هو مجموعة النقط $M(x,y,z)$ بحيث $ax+by+cz+d<0$ المحدودة بالمستوي (P) .

مثال - ♦

في معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقطتين $A(2,1,1)$ ، $B(4,-1,-3)$.
1- عين معادلة المستوي المتوسط للقطعة $[AB]$
2- عين متراجحة نصف الفضاء المحدود بالمستوي المتوسط للقطعة $[AB]$ والذي يشمل النقطة B .

✓ الحل :

1) لتكن I منتصف القطعة $[AB]$ إحداثياتها $(3,0,-1)$ ، المستوي المتوسط للقطعة $[AB]$ يمر بالنقطة I وشعاعه الناظمي $\overrightarrow{AB}$.
لتكن $M(x,y,z)$ نقطة كيفية من الفضاء

$M(x,y,z)$ تنتمي إلى هذا المستوي وهذا معناه أن $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ تكافئ $x-y-2z-5=0$
إذن معادلة (P) هي $x-y-2z-5=0$

2) هذا المستوي يقسم الفضاء إلى قسمين حيث أن كل النقاط في أحدهما تحقق ؛
$x-y-2z-5\leq0$ وفي القسم الآخر فإن كل النقاط تحقق $x-y-2z-5\geq0$
إذن المتراجحة التي تعبر عن نصف الفضاء الذي يشمل B والمحدود بالمستوي (P) هي $x-y-2z-5\geq0$.

تمرين تدريبي

في كل حالة من الحالات التالية هل المستويان (P) و (q) متقاطعان ؟ متعامدان ؟ متوازيان ؟

1) $(P): x+2y-z+4=0$ ، $(q): 2x+3y+8z-1=0$
2) $(P): x+y-3z+2=0$ ، $(q): 2x+2y-6z+7=0$
3) $(P): 2x+y-z+2=0$ ، $(q): x+2y+3z-1=0$

✓ الحل :

نسمي $\vec{n}_1$ ناظم (P) و $\vec{n}_2$ ناظم (q)

1) الشعاع الناظم لـ (P) هو $\vec{n_1}(1,2,-1)$

والشعاع الناظم لـ (q) هو $\vec{n_2}(2,3,8)$

$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0$ ومنه المستويان (P) و (q) متعامدان

2) $\vec{n_1}(1,1,-3)$ ، $\vec{n_2}(2,2,-6)$ لاحظ ان $\vec{n_2}=2\vec{n_1}$ اي $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ مرتبطان خطيا

وعليه فإن المستويين (P) و (q) متوازيان تماما.

3) $\vec{n_1}(2,1,-1)$ و $\vec{n_2}(1,2,8)$

$\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ غير متعامدين وغير مرتبطين خطيا ومنه (P) و (q) متقاطعان.

7. المعادلة الديكارتية لسطح كرة

تعريف

سطح الكرة التي مركزها I وطول نصف قطرها R هي مجموعة النقط M من الفضاء بحيث $IM=R$

خاصية

1) معادلة سطح الكرة التي مركزها $I(\alpha,\beta,\gamma)$ و طول نصف قطرها R في معلم متعامد ومتجانس هي $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2$

2) سطح الكرة التي قطرها $[AB]$ هي مجموعة النقط M من الفضاء بحيث $\vec{MA}\cdot\vec{MB}=0$

تمرين تدريبي

$(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلما للفضاء.

1) بين أن مجموعة النقط M التي إحداثياتها تحقق العادلة ؛ $x^2+y^2+z^2-2x+2y-7=0$ هي معادلة لسطح كرة يطلب تعيين عناصرها الأساسية (المركز ونصف القطر).

2) ادرس وضعية المستوي (P) ذو المعادلة $2x+2y+z-3=0$ بالنسبة إلى الكرة.

✔ الحل :

1) من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $x^2-2x=(x-1)^2-1$ ومن أجل كل y من $\mathbb{R}$ لدينا ؛ $y^2+2y=(y+1)^2-1$

إذن المعادلة المعطاة تكتب على الشكل $(x-1)^2-1+(y+1)^2-1+z^2-7=0$

اي $(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=9$

إذن مجموعة النقط المعطاة هي سطح كرة مركزها $I(1,-1,0)$ وطول نصف قطرها $R=3$

2) لدراسة الوضع النسبي لـ (P) وسطح الكرة نقوم بحساب المسافة بين مركز سطح الكرة والمستوي (P)

المسافة بين I والمستوي (P) هي $d=\frac{|2-1+0-3|}{\sqrt{4+1+1}}$ اي $d=\frac{2}{\sqrt{6}}$

بما أن $d\langle R$ فإن المستوي (P) يقطع سطح الكرة في دائرة.

8. دراسة مجموعة النقط من الشكل $\vec{AM}\cdot\vec{U}=k$ و $\alpha\vec{MA}^2+\beta\vec{MB}^2=k$

• دراسة مجموعة النقط $\vec{AM}\cdot\vec{U}=k$ حيث k عدد حقيقي.

نسمي (γ) هذه المجموعة.

• حالة $k=0$ ؛

- إذا كان $\vec{U}=\vec{0}$ فإن (γ) هي كل الفضاء.
- إذا كان $\vec{U}\neq\vec{0}$ فإن (γ) هي المستوي المار بالنقطة A وشعاع ناظمه هو $\vec{U}$

• حالة $k\neq0$ ؛

- إذا كان $\vec{U}=\vec{0}$ فإن (γ) هي مجموعة خالية.
- إذا كان $\vec{U}\neq\vec{0}$ ، نضع $\vec{AB}=\vec{U}$ مع $A\neq B$

مجموعة النقط المفروضه هي $\vec{AM}\cdot\vec{AB}=k$.

لتكن H المسقط العمودي لـ M على (AB) عندئذ ؛

$$\vec{AM}\cdot\vec{AB}=\vec{AH}\cdot\vec{AB}=\overline{AH}\cdot\overline{AB}$$

$\vec{AM}\cdot\vec{AB}=k$ يكافئ $\overline{AH}\cdot\overline{AB}=k$ يكافئ $\overline{AH}=\frac{k}{AB}$

بما أن A و B و k ثوابت فإنه توجد نقطة وحيدة H تحقق $\overline{AH}=\frac{k}{AB}$

إذن مجموعة النقط M التي تحقق $\vec{AM}\cdot\vec{AB}=k$ هي المستوي الذي يشمل H والعمودي على (AB) .

• دراسة مجموعة النقط $\alpha\vec{MA}^2+\beta\vec{MB}^2=k$

- إذا كان $\alpha+\beta=0$ و $\beta\neq0$ فإن ؛

$$\alpha\vec{MA}^2+\beta\vec{MB}^2=\alpha\vec{MA}^2+\beta\left(\vec{MA}+\vec{AB}\right)^2$$

$$=(\alpha+\beta)\vec{MA}^2+\beta\vec{AB}^2+2\beta\vec{MA}\cdot\vec{AB}$$

$$=\beta\vec{AB}^2+2\beta\vec{MA}\cdot\vec{AB}$$

$\alpha \overrightarrow{MA}^2 + \beta \overrightarrow{MB}^2 = k$ يكافئ $2\beta\, \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} = -\beta \overrightarrow{AB}^2 + k$

يكافئ $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} = \dfrac{-\beta \overrightarrow{AB}^2 + k}{2\beta}$

يكافئ $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = k'$

مجموعة النقط $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = k'$ درست في الحالة الأولى

- إذا كان $\alpha+\beta \neq 0$ فإن الجملة $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ لها مرجح G يحقق $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

من اجل كل نقطة كيفية M لدينا :

$$\alpha \overrightarrow{MA}^2 + \beta \overrightarrow{MB}^2 = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}^2 + \alpha \overrightarrow{GA}^2 + \beta \overrightarrow{GB}^2$$

$\alpha \overrightarrow{MA}^2 + \beta \overrightarrow{MB}^2 = k$ يكافئ $\alpha \overrightarrow{GA}^2 + \beta \overrightarrow{GB}^2 + (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}^2 = k$

يكافئ $\overrightarrow{MG}^2 = \dfrac{k-\alpha \overrightarrow{GA}^2 - \beta \overrightarrow{GB}^2}{\alpha+\beta}$

بوضع $k' = \dfrac{k-\alpha \overrightarrow{GA}^2 - \beta \overrightarrow{GB}^2}{\alpha+\beta}$ تصبح مجموعة النقط (γ) هي $MG^2 = k'$

- إذا كان $k' < 0$ فإن (γ) هي ϕ
- إذا كان $k' = 0$ فإن $(\gamma)=\{G\}$
- إذا كان $k' > 0$ فإن (γ) سطح كرة مركزها G ونصف قطرها $R=\sqrt{k'}$

تمرين تدريبي

$(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلما للفضاء، $A(1,1,1)$ ، $B(0,1,1)$ نقطتين منه.

1) عين مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق $2\overrightarrow{MA}^2 + 3\overrightarrow{MB}^2 = 2$

2) عين مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق $2\overrightarrow{MA}^2 - 2\overrightarrow{MB}^2 = -5$

الحل :

1) ليكن G مرجح الجملة $\{(A,2),(B,3)\}$ تحقق $2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

من اجل كل نقطة M من الفضاء لدينا :

$$2\overrightarrow{MA}^2 + 3\overrightarrow{MB}^2 = 5\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{GA}^2 + 3\overrightarrow{GB}^2 = 5\overrightarrow{MG}^2 + \frac{21}{4}\overrightarrow{GB}^2$$

$2\overrightarrow{MA}^2 + 3\overrightarrow{MB}^2 = 2$ يكافئ $\overrightarrow{MG}^2 = \frac{2}{5} - \frac{21}{20}GB^2$

$x_G = \dfrac{2+3\times 0}{5} = \dfrac{2}{5}$ ، $y_G = \dfrac{2+3}{5} = 1$ ، $z_G = \dfrac{2+3}{5} = 1$ ومنه $G(\frac{2}{5},1,1)$

إذن $GB^2 = (\frac{2}{5}-0)^2+(1-1)^2+(1-1)^2 = \frac{4}{25}$ و $MG^2 = \frac{2}{5} - \frac{21}{20}\times\frac{4}{25} = \frac{29}{125}$

وبالتالي (γ) هي سطح كرة مركزها G وطول نصف قطرها $R=\sqrt{\dfrac{29}{125}}$

2) بما أن $2-2=0$ فإن الجملة $\{(A,2),(B,-2)\}$ ليس لها مرجح وبالتالي :

$$2\overrightarrow{MA}^2 - 2\overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{MA}^2 - 2\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)^2 = -4\,\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} - 2AB^2$$

$AB^2 = \sqrt{1^2+0^2+0^2} = 1$

$2\overrightarrow{MA}^2 - 2\overrightarrow{MB}^2 = -5$ يكافئ $-4\,\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} - 2 = -5$

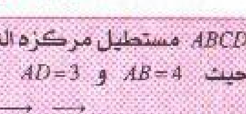
يكافئ $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}$

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}$ يكافئ $x-1=\frac{3}{4}$ يكافئ $x=\frac{7}{4}$

إذن مجموعة النقط المطلوبة هي المستوي ذو المعادلة $x=\frac{7}{4}$.



تطبيق 1 — الجداء السلمي في المستوي



$ABCD$ مستطيل مركزه النقطة O
حيث $AB=4$ و $AD=3$
E نقطة بحيث $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}$ و F
نقطة بحيث المثلث ABF متقايس الأضلاع مرسوم خارج المستطيل.

1- احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DE}$

2- احسب $\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{FB}$


الحل :

1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA}=-AB^2=-16$

لأن D مسقطها A على (AB)

$$\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}.(2\overrightarrow{AB})=2(AB^2)=32$$

2) $\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{BA}=BF\times BA\cos(-\frac{\pi}{3})=AB^2\cos(\frac{\pi}{3})=16\times\frac{1}{2}=8$

$$\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{FB}=AF\times FB\cos(\frac{2\pi}{3})=-\frac{1}{2}\times16=-8$$

تطبيق 2 — تعيين مماس لدائرة

لتكن (C) مجموعة النقط من المستوي ذات المعادلة :

(I) .... $x^2-3x+y^2+4y=0$

1) بين أن (C) هي دائرة يطلب تعيين مركزها I ونصف قطرها.

2) لتكن A نظيرة O بالنسبة إلى I حيث O مبدأ المعلم المتعامد والمتجانس بين أن A تنتمي إلى (C) معينا معادلة المماس لـ (C) عندها.

الحل :

1) المعادلة (I) تكتب $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y+2)^2=\frac{25}{4}$

ومنه نستنتج أن (C) دائرة مركزها $I\left(\frac{3}{2},-2\right)$ وطول نصف قطرها $\frac{5}{2}$

2) بما أن O تنتمي إلى (C) و A نظيرة O بالنسبة إلى I فإن A تنتمي إلى (C).

لتكن $M(x,y)$ نقطة من المماس المطلوب تحقق عندئذ $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{AM}=0$.

إحداثيات A هي $(3,-4)$ ومنه $\overrightarrow{AM}(x-3,y+4)$ و $\overrightarrow{IA}\left(\frac{3}{2},-2\right)$

$\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{AM}=0$ يكافئ $3x-4y-25=0$

إذن معادلة المماس لـ (C) عند النقطة A هي $3x-4y-25=0$

تطبيق 3 — تعيين أطوال الارتفاعات في مثلث

لتكن النقط $A(2,-1)$ ، $B(-3,-3)$ ، $C(3,5)$

1) بين أن النقط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة.

2) أ) عين معادلة العمود المرسوم من A في المثلث ABC

ب) أوجد طول هذا الارتفاع.

3) استنتج مساحة المثلث ABC

4) عين أطوال الارتفاعين الأخرين المتعلقين بالمثلث ABC.

الحل :

1) $\overrightarrow{AB}(-5,-2)$ ، $\overrightarrow{AC}(1,6)$ ، $\overrightarrow{BC}(6,8)$

$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ومنه النقط A ، B ، C لا تقع على استقامة واحدة.

2) أ) العمود المرسوم من A ناظمه هو $\overrightarrow{BC}$

لتكن $M(x,y)$ نقطة من هذا العمود إذن فهي تحقق $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0$ ومنه ينتج ،
$3x+4y-2=0$

ب) لتكن H المسقط العمودي للنقطة A على (BC)

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}=BH\times BC\cos(\overrightarrow{BH},\overrightarrow{BC})$$

ومنه ينتج $\left|\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}\right|=BH\times BC$

إذن $BH = \frac{\left|\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}\right|}{BC} = \frac{46}{10} = 4{,}6$

حسب نظرية فيتاغورس نجد $AH = \sqrt{BA^2 - BH^2} = 2{,}8$

3) مساحة المثلث ABC تساوي $\frac{1}{2}AH \times BC = 14$

4) ليكن h_1 طول الارتفاع المرسوم من B في المثلث ABC

لدينا $\frac{1}{2}h_1 . AC = 14$ ومنه $h_1 = \frac{28}{AC} = \frac{28}{\sqrt{37}} = 4{,}6$

ليكن h_2 طول الارتفاع المرسوم من C في المثلث ABC

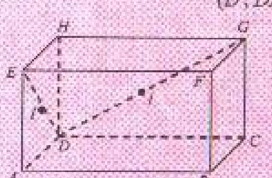
لدينا $\frac{1}{2}h_2 . AB = 14$ ومنه $h_2 = \frac{28}{AB} = 5{,}20$

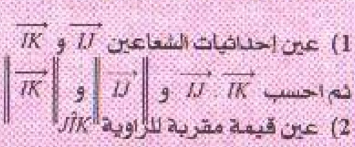


تطبيق 4 — حساب الجداء السلمي وتعيين قيمة مقربة لزاوية

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات قائم حيث $AB = 2$ و $AD = AE = 1$
ولتكن النقط I ، J ، K منتصفات القطع $[DE]$ ، $[DG]$ و $[EB]$ على التوالي.

نعتبر المعلم المتعامد والمتجانس $(D, \overrightarrow{DA}, \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$







1) عين احداثيات الشعاعين $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IK}$
ثم احسب $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IK}$ و $\left\|\overrightarrow{IJ}\right\|$ و $\left\|\overrightarrow{IK}\right\|$

2) عين قيمة مقربة للزاوية $\widehat{JIK}$

الحل :

1) $A(1,0,0)$ ، $B(1,2,0)$ ، $C(0,2,0)$ ، $D(0,0,0)$ ، $E(1,0,1)$ ، $F(1,2,1)$
$G(0,2,1)$ ، $H(0,0,1)$ ، $I\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$ ، $J\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$ ، $K\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{IJ}\left(-\frac{1}{2},1,0\right)$ ، $\overrightarrow{IK}\left(\frac{1}{2},1,0\right)$

2) لدينا $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IK} = \frac{-1}{4}+1 = \frac{3}{4}$

و $\left\|\overrightarrow{IJ}\right\| = \left\|\overrightarrow{IJ}\right\| = \frac{\sqrt{5}}{2}$

بما ان $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IK} = IJ \times IK \cos(\widehat{JIK})$ فإن $\cos(\widehat{JIK}) = \frac{\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IK}}{IJ \times IK} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{5}$

القيمة المقربة للزاوية $\widehat{JIK}$ هي 53,13 درجة

تطبيق 5 — حساب الجداء السلمي لشعاعين في الفضاء

$ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه a ، ولتكن النقطتان I و J منتصفي القطعتين $[EF]$ و $[GC]$ على التوالي.

احسب $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{EA}$ ، $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{FC}$ ، $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{GJ}$ ، $\overrightarrow{IE}\cdot\overrightarrow{IA}$ ، $\overrightarrow{JH}\cdot\overrightarrow{JD}$.

الحل :

$\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{EA} = 0$

$\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EI}\cdot(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD})$

$= \overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{AD} = 0+0 = 0$

$\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{GJ} = (\frac{1}{2}\overrightarrow{EI})\cdot(\frac{1}{2}\overrightarrow{CG}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CG}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BF}) = 0$

$\overrightarrow{IE}\cdot\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IE}\cdot(\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{EA}) = \overrightarrow{IE}\cdot\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IE}\cdot\overrightarrow{EA} = IE^2 + 0 = (\frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4}$

$\overrightarrow{JH}\cdot\overrightarrow{JD} = (\overrightarrow{JG}+\overrightarrow{GH})(\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{JG}\cdot\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JG}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{CD}$

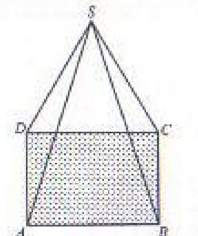
$= -\frac{a^2}{4} + 0 + 0 + a^2 = \frac{3}{4}a^2$

تطبيق 6 — حساب الجداء السلمي لشعاعين في الفضاء

$ABCDS$ هرم قاعدته مربع و رأسه S بحيث كل الأحرف لها نفس الطول a

احسب $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}$ ، $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC}$ ، $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AC}$

الحل :



$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB} = SA \times SB \cos(60°) = \frac{SA^2}{2} = \frac{a^2}{2}$

$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SA}\cdot(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{BC}$

$= \frac{a^2}{2} + \overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{2} - \overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$

$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{SA}\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{DC}$

$= -\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AB} = -\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = -a^2$

تطبيق 7 تعيين قيمة مقربة لزاوية في الفضاء



$ABCDE$ هرم منتظم قاعدته المربع $ABCD$ ، ولتكن النقطتان I و J منتصفي $[AD]$ و $[BC]$ على الترتيب.

1) عيّن قيمة مقربة للزاوية $E\hat{I}J$.
2) لتكن F نقطة بحيث $ABCDEF$ ثماني وجوه منتظم.
3) عيّن قيمة مقربة للزاوية $E\hat{I}F$.



الحل :

1) نضع $AB = a$

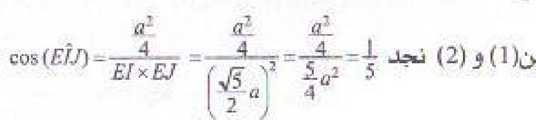
$$\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{EJ} = (\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AI}).(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BJ}) = \overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BJ}$$

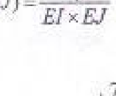


$$= a^2 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}a^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{EJ} = EI \times EJ \times \cos(E\hat{I}J) \quad \text{.............} (1)$$

$$\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{EJ} = \frac{a^2}{4} \quad \text{.............} (2)$$





من (1) و (2) نجد $\cos(E\hat{I}J) = \dfrac{\frac{a^2}{4}}{EI \times EJ} = \dfrac{\frac{a^2}{4}}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}a\right)^2} = \dfrac{\frac{a^2}{4}}{\frac{5}{4}a^2} = \dfrac{1}{5}$

إذن القيمة المقربة للزاوية $E\hat{I}J$ هي $78{,}46°$.

2) بما أن F هي نظيرة E بالنسبة إلى مركز المربع $ABCD$ فإن $E\hat{I}F = 2E\hat{I}O$

لدينا $\cos(E\hat{I}O) = \dfrac{IO}{IE} = \dfrac{0{,}5\,AB}{IE} = \dfrac{\frac{1}{2}a}{\frac{\sqrt{5}}{2}a} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

ومنه نجد $E\hat{I}O = 63{,}43°$ وبالتالي $E\hat{I}F = 126{,}87°$

تطبيق 8 إثبات التعامد في الفضاء باستعمال الجداء السلمي

$ABCD$ رباعي وجوه منتظم طول حرفه a

1) احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$
2) احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ ماذا تستنتج حول المستقيمين (AB) و (CD) ؟

الحل :

1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}a^2$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}a^2$

2) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD})$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

$= -\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2} = 0$

بما أن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$ فإن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متعامدان وبالتالي (AB) و (CD) متعامدان.

تطبيق 9 تعيين حجم رباعي في الفضاء

لتكن النقط $A(3,0,3)$ ، $B(1,4,-3)$ ، $C(1,0,3)$ ، $D(1,0,-3)$ من الفضاء

1) بيّن أن المثلث BCD قائم في D ثم عيّن مساحته.
2) بيّن أن المستقيم (AC) عمودي على المستوي (BCD)
3) عيّن حجم رباعي الوجوه A.

الحل :

1) لدينا $\overrightarrow{DB}(0,4,0)$ ، $\overrightarrow{DC}(0,0,6)$

بما أن $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC} = 0$ فإن المثلث BCD قائم في D

مساحة المثلث BCD هي $\frac{1}{2}DC \times DB$ أي 12

2) لدينا $\overrightarrow{AC}(-2,0,0)$

بما أن $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 0$ و $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DC} = 0$ فإن (AC) عمودي على (DB) وعمودي على (DC) .
فهو إذن عمودي على تقاطعهما وبالتالي فهو عمودي على المستوي (BCD)

3) حجم رباعي الوجوه يساوي $\frac{1}{3}\beta h$ حيث β مساحة القاعدة و h ارتفاعه.

مساحة القاعدة هي $\beta = 12$ وارتفاعه $h = AC = 2$ إذن حجمه هو $\vec{n}_q(1,1,1)$.

تطبيق 10 — تعامد مستقيم ومستوي

$ABCD$ رباعي وجوه منتظم طول حرفه a (كل أحرفه متساوية الطول).
I و J، K منتصفات القطع $[BC]$، $[AC]$، $[AD]$ على التوالي.
لتكن A' مركز ثقل المثلث BCD

1) احسب $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AD}$
2) احسب $\overrightarrow{JK}.\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{IK}.\overrightarrow{AD}$
3) بين أن المستقيم (AA') عمودي على المستوي (BCD)

✓ **الحل :**

1) $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA}=DC\times CA\times\cos(-\frac{\pi}{3})=\frac{a^2}{2}$

2) $\overrightarrow{JK}.\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AD}=\frac{a^2}{4}$

$$\overrightarrow{IK}.\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{KJ}).\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{JK}.\overrightarrow{AD}$$
$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AD}$$
$$=-\frac{1}{2}.\frac{a^2}{2}+\frac{1}{2}.\frac{a^2}{2}=0$$

3) $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IA'}).\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{IA'}.\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CI}).\overrightarrow{CD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{CD}$

$$=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CD}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CD}).\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{CD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}^2$$
$$=-\frac{1}{2}a^2+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{3}a^2=0$$

إذن (AA') عمودي على (CD) وبنفس الكيفية نبين أن (AA') عمودي على (CB)
وبالتالي (AA') عمودي على (BCD).

تطبيق 11 — حساب طول ارتفاع رباعي وجوه

$ABCD$ رباعي وجوه بحيث المثلثات ABC، ABD، ACD قائمة عند A
ومتساوية الساقين و $AD=AC=AB=a$، نسمي A_1 مركز ثقل المثلث BCD
1) بين أن المستقيم (AA_1) عمودي على المستوي (BCD)
2) بالتعبير عن حجم الرباعي $ABCD$ بطريقتين مختلفتين، احسب AA_1.

✓ **الحل :**

1) حتى يكون المستقيم (AA_1) عموديا على المستوي (BCD) يجب أن يكون (AA_1) عموديا على المستقيمين (CB) و (CD) :

$$\overrightarrow{AA_1}.\overrightarrow{CB}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA_1}).\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AA_1}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})+\frac{1}{3}(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}).\overrightarrow{CB}$$
$$=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}^2-\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}^2$$
$$=0+a^2-\frac{1}{3}\times BD\times BC\times\cos(-\frac{\pi}{3})-\frac{1}{3}BC^2=0+a^2-\frac{1}{3}(\sqrt{2}a)(\sqrt{2}a)\times\frac{1}{2}-\frac{2}{3}a^2$$
$$=a^2-\frac{1}{3}a^2-\frac{2}{3}a^2=0$$

لأن المثلث BCD متقايس الأضلاع طول ضلعه $\sqrt{2}\,a$.

$$\overrightarrow{AA_1}.\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA_1}).\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AA_1}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CD}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}).\overrightarrow{CD}$$
$$=\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CD}-\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}^2=\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}^2$$
$$a\times\sqrt{2}\,a\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{3}\sqrt{2}\,a\sqrt{2}\,a.\frac{1}{2}-\frac{1}{3}2a^2$$
$$=a^2-\frac{1}{3}a^2-\frac{2}{3}a^2=0$$

إذن (AA_1) عمودي على (CD) وعمودي على (CB)
وبما أن (CD) و (CB) متقاطعان فإن (AA_1) عمودي على (BCD).

2) باعتبار أن رباعي الوجوه $ABCD$ قاعدته المثلث ABC يكون ارتفاعه الضلع BD

وعليه الحجم هو V حيث $V=\frac{1}{3}\times BD\times\beta$ حيث β مساحة المثلث ABC والتي تساوي $\frac{a^2}{2}$

إذن $V=\frac{1}{3}\times\sqrt{2}\,a\times\frac{a^2}{2}$ أي $V=\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$ .... (1)

باعتبار أن قاعدة رباعي الوجوه هي المثلث BDC يكون $V=\frac{1}{3}\times AA_1\times\beta_1$ حيث β_1

مساحة المثلث BDC وتساوي $\frac{1}{2}CD.CB\sin\frac{\pi}{3}$

إذن $V=\frac{1}{3}\times AA_1\times\frac{1}{2}CD.CB\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$V=\frac{1}{3}AA_1\times\frac{1}{2}CB^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{3}\times AA_1\times\frac{1}{2}2a^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$V=\frac{\sqrt{3}}{6}a^2AA_1$ .... (2)

من (1) و (2) نجد $\frac{\sqrt{3}}{6}a^2AA_1=\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$ ومنه نجد $AA_1=\sqrt{\frac{2}{3}}\,a$

تطبيق 12 تعيين معادلة مستوي

في كل حالة من الحالات التالية، المستوي (p) ممثل بواحدة من معادلاته الديكارتية، A و B نقطتان علم إحداثياهما.
بعد التحقق من أن (AB) ليس عموديا على (p) أعط معادلة للمستوي (q) العمودي على (p) و المار من A و B.
أ) $(p) : x+y+z=0$ ، $A(1,0,0)$ ، $B(0,1,1)$
ب) $(p) : x+z=0$ ، $A(1,2,0)$ ، $B(1,0,1)$

✓ الحل :

لتكن $ax+by+cz+d=0$ معادلة المستوي (q) الذي ناظمه $\vec{n}(a,b,c)$

أ) ناظم (p) هو $\vec{n_1}(1,1,1)$ و $\overrightarrow{AB}(-1,1,1)$

بما أن $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n_1}=1$ فإن (AB) ليس عموديا على المستوي (p)

بما أن (q) عمودي على (p) فإن $\vec{n}\cdot\vec{n_1}=0$ ومنه ينتج $a+b+c=0$ ....(1)
A تنتمي إلى (q) تعني $a+d=0$ ....(2)
B تنتمي إلى (q) تعني $b+c+d=0$. ....(3)
من (1) و (2) و (3) نجد $d=a=0$ و $c=-b$
إذن (q) معادلته $by-bz=0$

وبما أن $\vec{n}$ ليس معدوما و $a=0$ فإن $b\neq 0$
وبالتالي معادلة (q) تصبح $y-z=0$

ب) ناظم (p) هو $\vec{n_2}(1,0,1)$ ولدينا $\overrightarrow{AB}(0,-2,1)$

بما أن $\vec{n_2}\cdot\overrightarrow{AB}=+1$ فإن (AB) ليس عموديا على المستوي (p)

(q) عمودي على (p) يعني أن $\vec{n}\cdot\vec{n_2}=0$
وهذا يعني أيضا $a+c=0$ ....(1)
A تنتمي إلى (q) تعني أن $a+2b+d=0$ ....(2)
B تنتمي إلى (q) تعني أن $a+c+d=0$ ....(3)

من (1) و (2) و (3) نجد $d=0$ و $c=-a$ و $b=-\frac{a}{2}$

ومنه معادلة (q) تصبح $ax-\frac{a}{2}y-az=0$

وبما أن $a\neq 0$ فإن معادلة (q) تصبح $x-\frac{1}{2}y-z=0$

تطبيق 13 تعيين معادلة مستوي عمودي على مستويين

نعتبر المستويين (p) و (q) المعرفين بمعادلتيهما الديكارتية
$(p) : x-2y+3z-5=0$ و $(q) : x+y+z+1=0$
1) بين أن (p) و (q) متقاطعان في المستقيم (d).
2) بين أن المستقيم (d) هو مجموعة النقط M بحيث :
$M(\frac{-5}{3}z+1 ، \frac{3}{2}z-2 ، z)$ مع z عدد حقيقي
3) عين شعاع توجيه المستقيم (d)
4) عين معادلة المستوي (R) العمودي على (p) و (q) و المار بالنقطة $A(2,5,-2)$

✓ الحل :

1) حتى يكون (p) و (q) غير متقاطعين يجب أن يكون ناظماهما مستقلين خطيا
ليكن $\vec{n_1}$ ، $\vec{n_2}$ ناظما (p) و (q) على الترتيب.
$\vec{n_1}(1 ، -2 ، 3)$ ، $\vec{n_2}(1 ، 1 ، 1)$
واضح أن الشعاعين $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ غير مرتبطين وبالتالي (p) و (q) متقاطعان.

2) لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من (d) إحداثياتها تحقق معادلة (p) و (q) في آن واحد،
وهذا يعني أن $x-2y+3z-5=0$ ....(1) و $x+y+z+1=0$ ....(2)

من (1) نجد $x=2y-3z+5$ نعوضه في (2) نجد $3y-2z+6=0$ أي $y=\frac{2}{3}z-2$

إذن $x=2(\frac{2}{3}z-2)-3z+5=-\frac{5}{3}z+1$

وبالتالي إحداثيات M هي $M(-\frac{5}{3}z+1 ، \frac{2}{3}z-2 ، z)$ مع $z\in\mathbb{R}$

3) من أجل $z=0$ نحصل على النقطة M_0 من (d) إحداثياتها $M_0(1,-2,0)$
ومن أجل $z=3$ نحصل على النقطة M_1 تنتمي إلى (d) إحداثياتها $M_1(-4 ، 0 ، 3)$
إذن شعاع توجيه (d) هو $\overrightarrow{M_0M_1}$ أي $\overrightarrow{M_0M_1}(-5 ، 2 ، 3)$

4) لتكن $ax+by+cz+d=0$ معادلة (R) مع $(a ، b ، c)\neq(0 ، 0 ، 0)$
(R) عمودي على (p) يعني $\vec{n_R}\cdot\vec{n_p}=0$ أي $a-2b+3c=0$ ....(1)
(R) عمودي على (q) يعني $\vec{n_R}\cdot\vec{n_q}=0$ أي $a+b+c=0$ .... (2)
$A(2 ، 5 ، -2)$ تنتمي إلى (R) تعني $2a+5b+2c+d=0$ .... (3)
من (1) و (2) و (3) نجد $a=-\frac{5}{3}c$ و $b=\frac{2}{3}c$ و $d=2c$

ومنه معادلة (R) هي $-\frac{5}{3}cx+\frac{2}{3}cy+cz+2c=0$

وبما ان $\vec{n}\neq 0$ فإن $c\neq 0$ وبالتالي معادلة (R) تصبح $-\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}y+z+2=0$ وبالضرب في 3 نجد $-5x+2y+3z+6=0$

تطبيق 14 تعامد مستقيم ومستو

$ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 1 ولتكن I مركز ثقل المثلث CFH

1-أ) بين ان المثلث CFH متقايس الأضلاع.

ب) بين ان النقط A ، G و I تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[CH]$ وإلى المستوي المحوري للقطعة $[CF]$

ج) استنتج أن المستقيم (AG) عمودي على المستوي (CFH) ويمر من النقطة I

2) اجب على السؤال (1) باستعمال المعلم المتعامد والمتجانس $(F, \overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FG}, \overrightarrow{FB})$

✓ الحل :

1) أ) بما ان $DCGH$ مربع فإن $[CH]$ قطره وحسب نظرية فيتاغورس نجد $CH=\sqrt{2}$
بنفس الكيفية نبين ان $CF=\sqrt{2}$ و $FH=\sqrt{2}$
إذن المثلث CFH متقايس الأضلاع.

ب) ـ بما ان $AH=AC$ و $GH=GC$ و $IF=IC$ فإن النقط A ، G ، I تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[CH]$

ـ بما ان $AF=AC$ و $GF=GC$ و $IF=IC$ فإن النقط A ، G ، I تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[CF]$

ج) ـ بما ان A ، G ، I تنتمي إلى المستوي المحوري لـ $[CH]$ وتنتمي إلى المستوي المحوري لـ $[CF]$ والمستويين المحوريين لـ $[CH]$ و $[CF]$ متقاطعين في مستقيم فإن النقط A ، G ، I تنتمي إلى هذا التقاطع وعليه فالنقط A ، G ، I تقع على استقامة واحدة.
ـ بما أن (FC) عمودي على المستوي المحوري لـ $[FC]$ والمستقيم (AG) محتوى في هذا المستوي فإن (FC) عمودي على (AG).
بنفس الكيفية نبين ان (AG) عمودي على (FH).
إذن (AG) عمودي على المستوي الذي يشمل (FH) و (FC) ، أي (AG) عمودي على (FCH)

2) $F(0,0,0)$ ؛ $E(1,0,0)$ ؛ $B(0,0,1)$ ، $G(0,1,0)$ ، $H(1,1,0)$ ، $D(1,1,1)$ ، $A(1,0,1)$ ، $C(0,1,1)$.
لتكن $I(x,y,z)$ ، بما أن I مركز ثقل المثلث CFH فإن :
$x_I=\frac{1+0+0}{3}=\frac{1}{3}$ ، $y_I=\frac{1+1}{3}=\frac{2}{3}$ ، $z_I=\frac{1}{3}$ إذن $I\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$

لدينا $\overrightarrow{CF}(0,-1,-1)$ ومنه $CF=\sqrt{2}$

لدينا $\overrightarrow{CH}(1,0,-1)$ ومنه $CH=\sqrt{2}$

لدينا $\overrightarrow{HF}(-1,-1,0)$ ومنه $HF=\sqrt{2}$
إذن المثلث CFH متقايس الأضلاع.

ب) لدينا $\overrightarrow{AH}(0,1,-1)$ ومنه $AH=\sqrt{2}$

لدينا $\overrightarrow{AC}(-1,1,0)$ ومنه $AC=\sqrt{2}$ إذن $AH=AC$
وبنفس الكيفية نبين أن $GH=GC$ و $IH=IC$
ومنه A ، G ، I تنتمي إلى المستوي المحوري لـ $[CH]$
وكذلك بنفس الكيفية نبين أن A ، G ، I تنتمي إلى المستوي المحوري لـ $[CF]$

ج) لكي نبين ان (AG) عمودي على المستوي (CFH) يكفي أن نبين ان (AG) عمودي على (CH) و (CF)

بما ان $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AH}=-1+0+1=0$ و $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{CF}=0-1+1=0$
فإن (AG) عمودي على المستوي (CFH)

ـ لكي نبين ان (AG) يشمل I يكفي أن نبين ان الشعاعين $\overrightarrow{AG}$ و $\overrightarrow{AI}$ مرتبطان خطيا.

$\overrightarrow{AI}\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$ و $\overrightarrow{AG}(-1,1,-1)$ ومنه $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$ وبالتالي I تنتمي إلى (AG)

تطبيق 15 تعيين معادلة مستو

لتكن النقط $A(2,2,2)$ ، $B(4,2,1)$ ، $C(2,3,3)$

1) تحقق ان النقط A ، B ، C تعين مستويا.

2) عين العددين الحقيقيين x و y بحيث ان الشعاع $\vec{n}(x,y,2)$ يعامد الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

3) استنتج معادلة للمستوي (ABC)

✓ الحل :

1) لكي تعين النقط A ، B ، C مستويا يجب ان يكو ن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستقلين خطيا

لدينا $\overrightarrow{AB}(2,0,-1)$ ، $\overrightarrow{AC}(0,1,1)$

واضح أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستقلان خطيا وبالتالي النقط A ، B ، C تعين مستوي.

2) $\vec{n}$ يعامد $\overrightarrow{AB}$ هذا معناه $2x-2=0$

$\vec{n}$ يعامد $\overrightarrow{AC}$ هذا معناه $y+2=0$

ومنه ينتج ان $x=1$ و $y=-2$ وبالتالي $\vec{n}(1, -2, 2)$

3) بما ان $\vec{n}$ عمودي على $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ فإنه عمودي على (ABC)
وبالتالي فهو يمثل ناظما للمستوي (ABC)
إذن $(ABC): x-2y+2z+d=0$
A تنتمي إلى (ABC) هذا معناه $2-4+4+d=0$ ومنه $d=-2$
إذن $(ABC): x-2y+2z-2=0$

تطبيق 16 حساب حجم رباعي الوجوه

لتكن النقط $A(0,0,1)$ ، $B(2,4,-1)$ ، $C(4,-4,-3)$ ، $S(4,0,4)$ ، $H\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$

1) بين أن المثلث ABC قائم في A

2-أ) بين أن الشعاع $\overrightarrow{SH}$ عمودي على الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ، ثم استنتج معادلة المستوي (ABC).

ب) تحقق أن النقطة H تنتمي إلى المستوي (ABC).

3-أ) بين أن $[SH]$ هو ارتفاع في رباعي الوجوه $SABC$.

ب) احسب حجم هذا الرباعي.

✓ الحل :

1) لدينا $\overrightarrow{AB}(2, 4, -2)$ و $\overrightarrow{AC}(4, -4, -4)$

بما ان $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=8-16+8=0$ فإن المثلث ABC قائم في A

2) أ) $\overrightarrow{SH}(-\frac{7}{2}, 0, -\frac{7}{2})$ ؛ $\overrightarrow{SO}.\overrightarrow{AB}=-7+7=0$ ، $\overrightarrow{SO}.\overrightarrow{AC}=-14+14=0$

ومنه $\overrightarrow{SH}$ عمودي على $\overrightarrow{AB}$ وعلى $\overrightarrow{AC}$

بما ان $\overrightarrow{SH}$ عمودي على $\overrightarrow{AB}$ وعلى $\overrightarrow{AC}$ فإن (SH) عمودي على (ABC)

وبالتالي يمكن اعتبار $\overrightarrow{SH}$ كشعاع ناظم للمستوي (ABC).

وعليه معادلة (ABC) هي $-\frac{7}{2}x-\frac{7}{2}z+d=0$.

بما أن A تنتمي إلى (ABC) فإن $-\frac{7}{2}\times0-\frac{7}{2}\times1+d=0$ ومنه $d=\frac{7}{2}$

إذن معادلة (ABC) هي $-x-z+1=0$

ب) بما ان $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1=0$ فإن H تنتمي إلى المستوي (ABC)

3) أ) بما ان $\overrightarrow{SH}$ ناظم للمستوي (ABC) و H تنتمي إلى (ABC) فإن :
$[SH]$ هو الارتفاع في الرباعي $SABC$.

ب) حجم الرباعي الوجوه هو $V=\frac{1}{3}\times SH\times B$ حيث B مساحة المثلث ABC

إذن $V=\frac{1}{3}\times SH\times\frac{AB\times AC}{2}=\frac{1}{3}\times\frac{7}{2}\sqrt{2}\times\frac{2\sqrt{6}\times4\sqrt{3}}{2}=\frac{84}{3}=28$

تطبيق 17 التعامد وحساب المسافة

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات قائم بحيث $AB=2$ ، $GC=BC=1$
و I منتصف القطعة $[AB]$.

1) أوجد معلما متعامدا ومتجانسا مبدؤه A بحيث يمكنك التعبير عن إحداثيات النقاط بسهولة.

2) عين معادلة المستوي (IFH)

3) احسب المسافة بين النقطة G والمستوي (IFH).

4) عين المسافة بين النقطة G والمستقيم (IH).

هل المسقط العمودي للنقطة G على المستوي (IFH) ينتمي إلى (IH)؟

✓ الحل :

1) المعلم المختار هو $(A, \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ وفي هذا المعلم لدينا :
$A(0,0,0)$ ، $B(2,0,0)$ ، $C(2,2,0)$ ، $D(0,1,0)$ ، $E(0,0,1)$ ، $F(2,0,1)$ ،
$G(2,1,1)$ ، $H(0,1,1)$ ، $I(1,0,0)$

2) معادلة (IFH) من الشكل $ax+by+cz+d=0$
I تنتمي إلى (IFH) معناه $a+d=0$ ... (1)
F تنتمي إلى (IFH) معناه $2a+c+d=0$ ... (2)
H تنتمي إلى (IFH) معناه $b+c+d=0$ ... (3)
من (1) و (2) و (3) نجد $c=d$ و $a=-d$ و $b=-2d$
وبما أن $(a, b, c)\neq(0,0,0)$ فإن $d\neq0$
نعوض a ، b ، c في معادلة (IFH) نجد $-dx-2dy+dz+d=0$
بالقسمة على d نجد $-x-2y+z+1=0$

3) المسافة بين النقطة G والمستوي (IFH) هي $\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{|-x_G-2y_G+z_G+1|}{\sqrt{1+4+1}}$.

4) لتكن K المسقط العمودي للنقطة G على (IH) ولتكن $K(\alpha, \beta, \gamma)$

إذن $\overrightarrow{GK} \perp \overrightarrow{IH}$ و $\overrightarrow{IH}$ يوازي $\overrightarrow{HK}$

لدينا $\overrightarrow{GK}(\alpha-2 ، \beta-1 ، \gamma-1)$ و $\overrightarrow{IH}(-1،1،1)$

$\overrightarrow{GK} \perp \overrightarrow{IH}$ معناه أن $-\alpha+2+\beta-1+\gamma-1=0$ أي $-\alpha+\beta+\gamma=0$ .... (I)

$\overrightarrow{IH}$ يوازي $\overrightarrow{HK}$ هذا معناه $\overrightarrow{HK}=\lambda\,\overrightarrow{IH}$ ومنه ينتج $\begin{cases}\alpha=-\lambda\\ \beta=1+\lambda\\ \gamma=1+\lambda\end{cases}$

نعوض عبارة α ، β ، γ في (I) نجد $\lambda+1+\lambda+1+\lambda=0$ ومنه $\lambda=-\frac{2}{3}$

إذن $K(\frac{2}{3} ، \frac{1}{3} ، \frac{1}{3})$

وبالتالي المسافة بين G و (IH) هي GK

حيث $GK=\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}}=\sqrt{\frac{8}{3}}$

- لو كان المسقط العمودي للنقطة G على (IFH) ينتمي إلى (IH) لكان $GK=\frac{2}{\sqrt{6}}$

وبما أن $GK=\sqrt{\frac{8}{3}}$ فإن المسقط العمودي للنقطة G على (IFH) لا ينتمي إلى (IH).

تطبيق 18 كيفية إيجاد المساحة الكلية لهرم

SABCD هرم منتظم قاعدته ABCD مربعة الشكل. طول ضلعها a و O مركز المربع. وبحيث طول الارتفاع [SO] هو h.

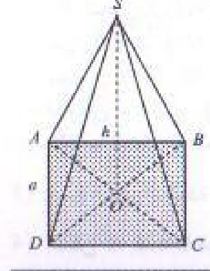
1) باستعمال العلاقتين $\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OC}$ بين أن: $\overrightarrow{SA}\,.\,\overrightarrow{SC}=h^2-\frac{a^2}{2}$

2) كيف نختار h بحيث يكون الضلعان [SA] و [SC] متعامدين، ثم بين أن $SA=a$

3) احسب المساحة الكلية لهذا الهرم.

الحل :

1)



$$\overrightarrow{SA}\,.\,\overrightarrow{SC}=(\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OA})\,.\,(\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OC})$$
$$=\overrightarrow{SO}^2+\overrightarrow{SO}.\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}$$
$$=h^2+0+0-\overrightarrow{OA}^2=h^2-\frac{1}{2}a^2$$

2) $\overrightarrow{SA}\,.\,\overrightarrow{SC}=0$ تكافئ $h^2-\frac{1}{2}a^2=0$ يكافئ $h=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

لدينا $SA=\sqrt{OA^2+SO^2}$ ومنه $SA=\sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2+(\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2}=a$

3) مساحة الهرم SABCD هي β

حيث $\beta=4\times SA\times SD\times Sin(\frac{\pi}{3})+a^2$

$\beta=4\times a^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+a^2=(2\sqrt{3}+1)\,a^2$

تطبيق 19 كيفية إيجاد المسافة بين نقطة ومستقيم

(p) و (q) مستويان معادلتاهما على الترتيب $x+y+z=0$ ، $x+y-2z-1=0$ و A نقطة إحداثياتها $(2,1,2)$

1) بين أن المستويين (p) و (q) متعامدان.

2) احسب المسافة بين A والمستويين (p) و (q)

3) استنتج المسافة بين A والمستقيم (d) الناتج من تقاطع (p) و (q)

الحل :

1) لدينا $\vec{n}_p(1،1،-2)$ ، $\vec{n}_q(1،1،1)$

(p) و (q) متعامدان يعني أن $\vec{n}_p.\vec{n}_q=0$.

بما أن $\vec{n}_p.\vec{n}_q=1+1-2=0$ فإن (p) و (q) متعامدان.

2) لتكن h_1 المسافة بين A و (p) و h_2 المسافة بين A و (q).

$h_1=\frac{|2+1-4-1|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{2}{\sqrt{6}}$ و $h_2=\frac{|2+1+2|}{\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}}$

3) H_1 ، H_2 المسقطان العموديان لـ A على (p) و (q) على التوالي.

ولتكن A' المسقط العمودي لـ A على (d)

بما أن (p) و (q) متعامدان فإن الرباعي H_1H_2AA' مستطيل

وبالتالي [AA'] يكون قطرا لهذا المستطيل.

إذن $AA'=\sqrt{h_1^2+h_2^2}=\sqrt{\frac{25}{3}+\frac{4}{6}}=3$

طريقة ثانية :

إحداثيات النقطة A' تحقق :

$\overrightarrow{AA'}\perp\overrightarrow{CD}$ حيث $\overrightarrow{CD}$ هو شعاع توجيه (d) و A' تنتمي إلى (p) و (q).

إحداثيات C و D التي هي من الشكل (x,y,z) تحقق معادلتي (p) و (q)

اي $\begin{cases} x+y-2z-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

لإيجاد (x,y,z) نختار قيمة لـ z ونبحث عن y و x .

فمثلا نختار $z=-\frac{1}{3}$ وفي هذه الحالة نجد $x+y=\frac{1}{3}$

- بأخذ $x=0$ نجد $y=\frac{1}{3}$ وبالتالي $C\left(0,\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$

- بأخذ $y=0$ نجد $x=\frac{1}{3}$ ومنه $D\left(\frac{1}{3},0,-\frac{1}{3}\right)$ إذن $\overrightarrow{CD}\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},0\right)$

لتكن $(\alpha ، \beta ، \gamma)$ إحداثيات النقطة A'

$\overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{CD}$ يعني أن $\alpha-\beta-1=0$ ... (1)

ولدينا أيضا (2) ... $\alpha+\beta-2\gamma-1=0$ ، $\alpha+\beta+\gamma=0$ ...(3)

بعد حل جملة المعادلات (1) و (2) و (3) نجد $A'(\alpha,\beta,\gamma)=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$

إذن $AA'=\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{16}{9}+\frac{49}{9}}=\sqrt{\frac{81}{9}}=3$

تطبيق 20 تعيين مجموعة النقط

A ، B ، C ، D أربع نقط ليست من نفس المستوي. I و J ، G منتصفات القطع $[AB]$ ، $[CD]$ و $[IJ]$ على التوالي.

1-أ) هل يمكن أن تكون I منطبقة على J ؟

ب) هل توجد نقط M من الفضاء بحيث $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$ ؟

2) عين المجموعة (p_1) للنقط M من الفضاء بحيث $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|$.

3) نفرض أن $AB=CD$. نريد تعيين المجموعة (p_2) للنقط M من الفضاء بحيث $MA^2+MB^2=MC^2+MD^2$

أ) بين أن $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$

ب) حدد المجموعة (p_2) ثم قارن بين (p_1) و (p_2).

✓الحل :

1) أ) من غير الممكن أن تكون I منطبقة على J لأنه لو كان كذلك لكان (AB) يقطع (CD) في I وهذا يعني أن النقط A ، B ، C ، D تقع في نفس المستوي مما يناقض الفرضية.

ب) لدينا $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ و $\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MJ}$

إذن $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$ يكافئ $2\overrightarrow{MI}=2\overrightarrow{MJ}$ يكافئ $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{0}$

وهذا خطأ ومنه لا توجد نقط M تحقق المساواة المفروضة.

2) $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|$ يكافئ $MI=MJ$

ومنه M تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[IJ]$

إذن (p_1) هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[IJ]$

3) أ) $MA^2+MB^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=2MI^2+IA^2+IB^2+2\overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})$

$=2MI^2+IA^2+IB^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{0}=2MI^2+\frac{1}{4}AB^2+\frac{1}{4}AB^2$

$=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$

ب) وبنفس الطريقة السابقة نجد $MC^2+MD^2=2MJ^2+\frac{1}{2}CD^2$

المساواة $MA^2+MB^2=MC^2+MD^2$ تصبح $2MI^2+\frac{1}{2}AB^2=2MJ^2+\frac{1}{2}CD^2$

وبما أن $AB=CD$ فإن هذه المساواة تصبح $MI^2=MJ^2$ أي $MI=MJ$

وهذا يعني أن M تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[IJ]$

إذن (p_2) هو المستوي المحوري للقطعة $[IJ]$ و ينتج مما سبق أن (p_1) منطبق على (p_2) .

تطبيق 21 تعيين نقطة تقاطع مستقيم ومستو

المستقيم (d) هو تقاطع المستويين (p_1) و (p_2) معادلتاهما على التوالي :

$x-y+z-3=0$ و $2x+z=0$

(p) مستوي معادلته $x+y-z=0$

بين أن المستقيم (d) يقطع (p) معينا إحداثيات نقطة تقاطعهما.

✓الحل :

حتى يقطع (d) المستوي (p) يجب أن يكون شعاع توجيه (d) ليس عموديا على الشعاع الناظم لـ (p)

- الشعاع الناظم لـ (p) هو $\vec{n}(1،1، -1)$

- تعيين شعاع توجيه (d) :

$\begin{cases} x-y+z-3=0 \\ 2x+z=0 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x=x \\ y=-x-3 \\ z=-2x \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x=x \\ y+3=-x \\ z=-2x \end{cases}$

بوضع $A(0، -3، 0)$ و $M(x، y، z)$ نجد $\overrightarrow{AM}=x(1، -1، -2)$

ومنه $\overrightarrow{AM} = x\vec{V}$ حيث $\vec{V}$ شعاع توجيه المستقيم (d) المار من A

بما أن $\vec{V} \cdot \vec{n} = 2$ فإن $\vec{n}$ ليس عموديا على $\vec{V}$

وعليه فإن المستقيم (d) يقطع (p) في النقطة H إحداثياها حل للجملة :

$$\begin{cases} 2x+z=0 & \dots (1) \\ x-y+z-3=0 & \dots (2) \\ x+y-z=0 & \dots (3) \end{cases}$$

بجمع (2) و (3) نجد $2x=3$ ومنه $x=\frac{3}{2}$

بتعويض x في (1) و (2) نجد $z=-3$ و $y=\frac{-9}{2}$

إذن $H\left(\frac{3}{2} ، \frac{-9}{2} ، -3\right)$

تطبيق 22 تعيين معادلة سطح كرة ماس لمستو

(p) مستوي معادلته $4x-3z+3=0$ و A نقطة من (p) فاصلتها 3 وترتيبها 2 .
عين معادلة سطح الكرة التي قطرها 10 ومماسة لـ (p) عند A .

الحل :

إحداثيات النقطة A هي $(3 ، 2 ، z)$

بما أن A تنتمي إلى (p) فإن $12-3z+3=0$ أي $z=5$

إذن $A(3 ، 2 ، 5)$

ليكن $\omega(\alpha ، \beta ، \gamma)$ مركز سطح الكرة التي نصف قطرها 10 والمماسة لـ (p) عند A

إذن $\overrightarrow{A\omega}$ مرتبط خطيا مع $\vec{n_p}$. وبالتالي $\overrightarrow{A\omega} = \lambda \vec{n_p}$ حيث $\vec{n_p}$ ناظم لـ (p)

$$\begin{cases} \alpha-3=4\lambda \\ \beta-2=0 \\ \gamma-5=-3\lambda \end{cases}$$ ومنه نجد $$\begin{cases} \alpha=4\lambda+3 \\ \beta=2 \\ \gamma=-3\lambda+5 \end{cases}$$

بما أن A نقطة من سطح الكرة فإن $\omega A^2=100$

ومنه $100=(\alpha-3)^2+(\beta-2)^2+(\gamma-5)^2$ .... (1)

بتعويض α و β و γ في (1) نجد $(4\lambda)^2+(-3\lambda)^2=100$

بالتبسيط نجد $25\lambda^2=100$ ومنه نجد $(\lambda=2)$ أو $\lambda=-2$

- إذا كان $\lambda=2$ فإن $\omega(11 ، 2 ، -1)$
- إذا كان $\lambda=-2$ فإن $\omega(-5 ، 2 ، 11)$

إذن توجد كرتين نصف قطرهما 10 ومركزيهما $(11 ، 2 ، -1)$ و $(-5 ، 2 ، 11)$ مماسة لـ (p) عند A

تطبيق 23 تعيين المسافة بين نقطة ومستقيم

نعتبر النقط $A(0 ، 6 ، 0)$ ، $B(0 ، 0 ، 8)$ ، $C(4 ، 0 ، 8)$.

1-أ) علم هذه النقط في المعلم المتعامد و المتجانس $\left(o ، \vec{i} ، \vec{j} ، \vec{k}\right)$.

ثم بين أن (BC) عمودي على المستوي (OAB)

ب) عين حجم رباعي الوجوه $(OABC)$

جـ) بين أن النقط $O ، A ، B ، C$ تنتمي إلى سطح كرة يطلب تعيينها.

2) لكل عدد حقيقي k من $]0 ، 8[$ نرفق النقطة $M(0 ، 0 ، k)$.

المستوي (π) الذي يشمل M والعمودي على (OB) يقطع المستقيمات (OC) ، (AC) ، (AB) على التوالي في $N ، P ، Q$

أ) عين طبيعة الرباعي $(MNPQ)$

ب) هل المستقيم (PM) عمودي على (OB) ؟

جـ) من أجل أي قيمة لـ k يكون المستقيم (PM) عموديا على (AC)

د) عين MP^2 بدلالة k ومن أجل أي قيمة لـ k تكون المسافة PM تكون أصغرية.

الحل :

1) أ) بما أن (CB) يوازي (OI) و (OI) يعامد المستوي (OAB)
فإن (CB) يعامد (OAB)

ب) $V=\frac{1}{3}OA \times (OCB$ مساحة$)$

$$V=\frac{1}{3}OA \times \frac{CB \times OB}{2} = \frac{1}{3} \times 6 \times \frac{4 \times 8}{2} = 32$$

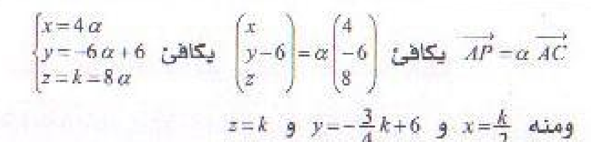
جـ) بما أن $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}=0$ فإن المثلث OAC قائم في O
وبالتالي فإن النقط $O ، A ، C$ تنتمي إلى سطح الكرة التي قطرها $[AC]$

بما أن $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}=0$ فإن المثلث ABC قائم في B
وبالتالي النقط $A ، B ، C$ تنتمي إلى سطح الكرة التي قطرها $[AC]$.
إذن النقط $A ، B ، C ، O$ تنتمي إلى سطح الكرة التي قطرها $[AC]$.
نصف قطر هذه الكرة هو $r=\frac{AC}{2}=\sqrt{29}$ ومركزها $\omega(2 ، 3 ، 4)$

2) أ) بما أن (NM) يوازي (CB) و (PQ) يوازي (CB) والمستقيمان (PQ) و (NM) ينتميان إلى نفس المستوي فإن :
(NM) يوازي (PQ) وبالتالي الرباعي $MNPQ$ متوازي أضلاع.

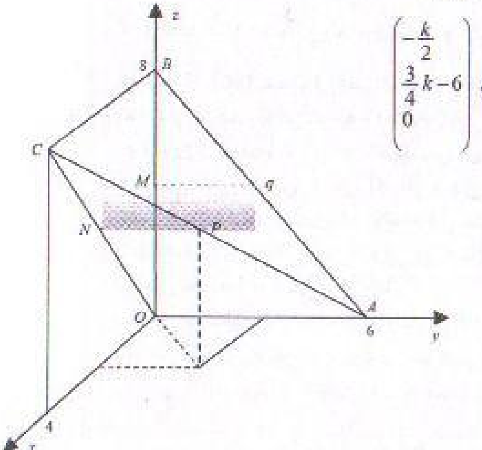
ب) بما أن P و (BB') تنتميان إلى المستوي (π) و (π) عمودي على (OB) فإن (PM) عمودي على (OB)

جـ) لتكن $(x ، y ، z)$ إحداثيات النقطة P



$\overrightarrow{AP}=\alpha\,\overrightarrow{AC}$ يكافئ $\begin{pmatrix}x\\y-6\\z\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}4\\-6\\8\end{pmatrix}$ يكافئ $\begin{cases}x=4\alpha\\y=-6\alpha+6\\z=k=8\alpha\end{cases}$

ومنه $x=\frac{k}{2}$ و $y=-\frac{3}{4}k+6$ و $z=k$



$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ يكافئ $\begin{pmatrix}-\frac{k}{2}\\\frac{3}{4}k-6\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\-6\\8\end{pmatrix}=0$

يكافئ $k=\frac{72}{13}$

د) لدينا $MP^2=(\frac{k}{2})^2+(\frac{3}{4}k-6)^2$

$=\frac{k^2}{4}+\frac{9}{16}k^2+36-9k$

$=\frac{13}{16}k^2-9k+36$

إذن $MP=\sqrt{\frac{13}{16}k^2-9k+36}$

نضع $f(k)=\sqrt{\frac{13}{16}k^2-9k+36}$

ومنه $f(k)=\frac{1}{4}\sqrt{13k^2-144k+576}$

f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ولدينا

$f'(k)=\frac{1}{8}\,\frac{26k-144}{\sqrt{13k^2-144k+576}}$

$f'(k)=0$ يكافئ $k=\frac{144}{26}=\frac{77}{13}$

k	0	$\frac{77}{13}$	8
$f'(k)$	-	0	+
تغيرات f	6 ↘		↗ 4

القيمة التي من أجلها تكون المسافة PM أصغرية هي $\frac{77}{13}$

تمارين و مسائل

1 - $ABCD$ مربع طول ضلعه 1، ولتكن I و J منتصفي $[AB]$ و $[CD]$

برهن أن الشعاعين $\overrightarrow{BI}$ و $\overrightarrow{AJ}$ متعامدان، ثم عين القيمة المقربة للزاوية $D\hat{B}J$.

2 - لتكن $A(1,1)$ وليكن (d) مستقيم معادلته $x-2y+3=0$

1- عين معادلة المستقيم العمودي على (d) و المار من النقطة A

2- عين إحداثيات النقطة A' المسقط العمودي للنقطة A على (d)

3- استنتج المسافة بين النقطة A و (d)

3 - لدينا النقطتان $A(1,2)$ ، $B(3,4)$ و I منتصف $[AB]$

في كل حالة من الحالات التالية عين طبيعة مجموعة النقط M التي تحقق الشرط المعطى، ثم حدد المعادلة الديكارتية لكل منها :

$(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{MA}=0$ ؛ $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ ؛ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=0$

4 - ليكن (d) مستقيم معادلته $2x+y-4=0$ ، و $A(1,3)$

1- تحقق أن A لا تنتمي إلى (d) .

2- عين معادلة الدائرة التي مركزها A و المماسة لـ (d)

5 - لتكن (C) دائرة مركزها O ولتكن A ، A' ، B ، B' أربع نقاط من هذه الدائرة بحيث المستقيمين (AA') و (BB') متعامدان، نسمي I نقطة تقاطعهما.

1- بين أن $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IA'}=OI^2-OA^2$.

2- بين أن المحور المرسوم من I في المثلث AIB هو ارتفاع في المثلث $IA'B'$

6 - A و B نقطتان من المستوي بحيث $AB=6$ و I منتصف $[AB]$ و k عدد حقيقي.

1) بين أن $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=k$ تعني أن $MI^2-IA^2=k$

2- عين مجموعة النقط M من المستوي بحيث $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=k$

7 - ABC مثلث و M نقطة كيفية من المستوي.

1- بين أن $\vec{MA}.\vec{BC}+\vec{MB}.\vec{CA}+\vec{MC}.\vec{AB}=\vec{0}$

ثم استنتج أن ارتفاعات المثلث ABC متقاطعة في نقطة.

2- ليكن Ω مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC . ولتكن H نقطة بحيث $\vec{\Omega H}=\vec{\Omega B}+\vec{\Omega C}$

بين أن H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC .

اكتب $\vec{MB}$ و $\vec{MC}$ بدلالة $\vec{MA}$ وشعاع آخر.

8 - لتكن النقط $A(4,3,-5)$ ، $B(5,-1,3)$ ، $C(6,-2,-3)$

احسب $\vec{AB}.\vec{AC}$ و $\|\vec{AB}\|$ و $\|\vec{AC}\|$ ثم استنتج قيمة تقريبية للزاوية $B\hat{A}C$.

9 - $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه a ، I مركز المربع $EFGH$ و J مركز المربع $BCGF$

أ) بين أن المستقيمين (AE) و (EI) متعامدان . معينا الطول AI .

ب) عين الطول AJ ثم احسب $\vec{AE}.\vec{BJ}$ و $\vec{EI}.\vec{AB}$ و $\vec{EI}.\vec{BJ}$

- احسب $\vec{AI}.\vec{AJ}$ بطريقتين مختلفتين واستنتج قيمة مقربة للزاوية $I\hat{A}J$

- عين قيمة مقربة للزاويتين الأخرتين في المثلث AIJ .

10 - لتكن النقط $A(0,0,1+\sqrt{2})$ ، $B(0,1,1)$ ، $C(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},1)$ ، $C(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},1)$.

1- بين أن المستقيمين (DA) و (BC) متعامدان .

2- بين أن رباعي الوجوه $ABCD$ منتظم.

11 - $ABCD$ رباعي وجوه، I و J منتصفي $[AB]$ و $[CD]$ على التوالي،

G مرجح الجملة $(A,1)$ ، $(B,1)$ ، $(C,1)$.

بين أن المستقيمين (IJ) و (AB) متعامدان إذا وفقط إذا كان $GA=GB$.

12 - A ، B ، C ، D أربع نقاط من الفضاء

1- بين أن المستقيمين (AB) و (CD) متعامدان إذا وفقط إذا كان $AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$

2- ليكن رباعي الوجوه $ABCD$ بحيث المستقيم (AB) يعامد (CD)

والمستقيم (BC) يعامد (AD)

- بين أن المستقيم (BD) يعامد (AC) .

13 - $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء، إحداثيات النقط A ، B ، C هي :

$A(2\sqrt{2},0,0)$ ، $B(0,3,0)$ ، $C(0,0,3)$ ، و I منتصف $[BC]$

أوجد أطوال و زوايا المثلث AOI

14 - (P) مستوي معادلته $x+2y-2z-1=0$ و (q) مستوي معادلته $2x-y+2z+1=0$

1- عين مجموعة النقط M متساوية المسافة عن (P) و (q) ثم بين أن هذه المجموعة هي تقاطع مستويين (π) و (π') يطلب تعيينهما.

2- تحقق أن (π) و (π') متعامدان.

15 - $A(2، 0، 2)$ ، $B(-1، 1، 0)$ نقطتان من الفضاء.

1- عين معادلة المستوي المار بالنقطة A وناظمه $\vec{n}(-2،4،6)$

2- عين معادلة المستوي العمودي على (AB) والمار من A .

3- عين معادلة المستوي المحوري للقطعة $[AB]$.

16 - نعتبر المكعب $ABCDEFGH$ حيث I منتصف $[EF]$ و J مركز الوجه $ADHE$

ولنعتبر المعلم $(A، \vec{AB}، \vec{AD}، \vec{AE})$.

هل هذه المعطيات صحيحة ام خاطئة ؟

1- مجموعة النقط $M(x، y، z)$ بحيث $y=-x+1$ هي المستوي (DBH)

2- المستوي (AIG) هو مجموعة النقط $M(x، y، z)$ بحيث $2x-y-z=0$

3- المستقيم (BJ) عمودي على المستوي (AIG)

17 - لتكن النقط $A(2، -2، 3)$ ، $B(1،1، 1)$ ، $C(3، 1، 0)$

1- تحقق أن هذه النقط تنتمي إلى نفس المستوي.

2- عين معادلة المستوي (ABC).

18 - لتكن النقط $A(4، 0، 1)$ ، $B(1، -1، 2)$ ، $C(2، -1، 0)$ ، $D(2،1، -2)$

1- بين أن المثلث ABC قائم في C ثم عين مساحته.

2- أ) تحقق أن الشعاع $\vec{n}(2,-5,1)$ ناظم للمستوي (ABC) ثم استنتج معادلته.

ب) عين المسافة بين D والمستوي (ABC).

3- باستعمال السؤالين (1) و (2) عين حجم رباعي الوجوه $ABCD$

4- أ) عين معادلة المستوي (BCD)

ب) عين المسافة بين A والمستوي (BCD).

5- عبر عن حجم رباعي الوجوه $ABCD$ بدلالة مساحة المثلث BCD .ثم استنتج مساحة BCD .

19 - نسمي ارتفاع رباعي وجوه كل مستقيم يشمل واحد من رؤوسه وعمودي على الوجه المقابل لهذا الراس.

نقول عن رباعي وجوه أنه متلاقي الأعمدة (أعمدته تتقاطع في نقطة) إذا كانت أعمدته الأربعة متقاطعة. وبصيغة أخرى نقول عن رباعي وجوه $ABCD$ أنه متلاقي الأعمدة إذا وفقط إذا كانت $(AC) \perp (AB)$ و $(AB) \perp (CD)$ و $(AD) \perp (BC)$.

1- لتكن النقط $I(1,0,0)$ ، $J(0,1,0)$ ، $K(0,0,1)$.

هل رباعي الوجوه $(OIJK)$ متلاقي الأعمدة ؟

2- نعتبر رباعي الوجوه $ABCD$ ولتكن H المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (BCD) .

اثبت أنه إذا كان الارتفاعان المرسومان من النقطتين A و B في الرباعي الوجوه $ABCD$ متقاطعين فإن المستقيم (BH) هو ارتفاع في المثلث BCD .

3- نعتبر النقط $A(2,2,-1)$ ، $B(-7,1,1)$ ، $C(3,-3,3)$ ، $D(-2,-5,-1)$

أ) تحقق أن المعادلة الديكارتية للمستوي (BCD) هي $-2x-3y+4z-15=0$

ب) عين إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (BCD) .

جـ) احسب الجداء السلمي $\vec{BH}\cdot\vec{CD}$. هل رباعي الوجوه متلاقي الأعمدة ؟

(إذا كانت H مسقط A على المستوي (BCD) هي نقطة تلاقي أعمدة المثلث BCD فإن الرباعي $ABCD$ هو متلاقي أعمدة).

20 - A ، B ، C ، D نقط إحداثياتها على التوالي :

$A(3,4,3)$ ، $B(5,-2,3)$ ، $C(2,-1,1)$ ، $D(4,3,-3)$

1- تحقق أن النقط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة.

2- عين إحداثيات النقطة D' المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) .

21 - $ABCD$ رباعي وجوه بحيث المستقيمين (AB) و (CD) متعامدان ولتكن I المسقط العمودي لـ A على (CD) .

بين أن I المسقط العمودي لـ B على (CD) .

22 - A ، B ، C ، D ، E نقط إحداثياتها $A(3,1,3)$ ، $B(2,0,-1)$ ، $C(5,0,0)$ ، $D(1,4,0)$ ، $E(2,-1,1)$ على الترتيب.

1- بين ن النقط C ، D ، E ليست على استقامة واحدة.

2- اثبت أن المستقيم (AB) عمودي على المستوي (CDE)

23 - (P) مستوي معادلته $x-2y+2z-3=0$ ، ولتكن A نقطة من (P) فاصلتها 3 وترتيبها 1 .

1- عين ارتفاع النقطة A .

2- عين إحداثيات الشعاع الناظم لـ (P) واستنتج شعاعين $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ ناظمين لـ (P)

وبحيث طويلتاهما 3 .

3- Ω_1 نقطة بحيث $\vec{A\Omega_1}=\vec{n_1}$ ، اشرح لماذا سطح الكرة (S_1) التي مركزها Ω_1 ونصف قطرها 3 مماس لـ (P) عند A .

4- عين معادلة كل سطح كرة نصف قطرها 3 و الماسة لـ (P) عند A .

24 - نعتبر النقطتين $A(4,5,5)$ ، $B(-2,2,2)$ من الفضاء.

1- عين معادلة سطح الكرة التي قطرها $[AB]$ وهذا بعد حساب نصف قطرها وتعيين مركزها.

2- عين معادلة سطح الكرة التي قطرها $[AB]$ وهذا باستعمال العلاقة $\vec{MA}\cdot\vec{MB}=\vec{0}$

25 - لتكن (γ) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ المعرفة بـ $x^2+y^2+z^2-2z-8=0$

1- تحقق أن $A(0,0,4)$ تنتمي إلى (γ) .

ب- بين أن (γ) سطح كرة يطلب تعيين مركزها وطول نصف قطرها.

2- عين معادلة المستوي المماس لـ (γ) في النقطة A .

26 - 1- عين معادلة المستوي (P) الذي شعاعه الناظم $\vec{n}(2,-2,1)$ والمار بالنقطة $A(7,0,8)$

2- عين المتراجحة التي تعبر عن نقاط نصف الفضاء المفتوح Σ المحدود بالمستوي (P) ويشمل النقطة $O(0,0,0)$.

3- عين معادلة سطح الكرة (C) المماسة لـ (P) عند النقطة $B(9,1,6)$ بحيث مركزها I ينتمي إلى Σ ويبعد عن المستوي (P) بمسافة قدرها 6 .

27 - $ABCD$ رباعي وجوه منتظم و M نقطة تقع داخله. بين أن مجموع مسافات النقطة M عن كل وجه من وجوه الرباعي $ABCD$ تساوي ارتفاع هذا الرباعي.

28 - حدد جملة متراجحات تعبر عن النقط الموجودة داخل الموشور $OABCDE$.

29 - $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 1 ولتكن I و J منتصفي الحرفين $[AB]$ و $[CG]$ على التوالي. إليك الشكل التالي.